第 18 卷　第 2 期
2005 年 6 月
新乡教育学院学报
JOURNAL OF XINXIANG EDUCATION COLLEGE
Vol.18, No.2
JUNE, 2005

勒贝格积分与黎曼积分的区别与联系

周成林

(河南交通职业技术学院,河南 郑州 450005)

摘　要:本文以期通过对勒贝格积分与黎曼积分发展过程的分析与探讨,归纳出二者的区别与联系。

关键词:勒贝格积分;黎曼积分;区别;联系

中图分类号:G642.41　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-3325(2005)02-0075-02

随着微积分学的发展,人们在利用(R)积分时,逐渐感到它有很大的局限性,为什么呢?这就要从它的起源说起。

在数学史上,第一个提出分割区间、作和式极限来严格定义积分的要推 cauahy,他考察的积分对象是在[a,b]上的连续函数,并用连续函数的中值性质推导出积分的存在性。黎曼在研究三角级数时,特别讨论了函数的可积性问题,并且给出了积分的定义和充要条件,这样(R)积分在处理诸如逐段连续的函数以及一致收敛的级数来说是足够的。然而随着集合论的一系列工作的创始,出现了一些"病态"函数,在研究它们的可积性时,(R)积分理论面临着新的挑战。

比如:

(1) 狄利克雷函数 $D(X)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in \overline{Q}\end{cases}$

如此简单的有界函数不(R)可积(定义证),预示着可积函数类已经远远不能满足分析数学的需要。那么,我们能不能扩大它的范围呢?应该如何去做?

(2) $f_n(x)=x^n(0\leqslant x\leqslant 1)$,它是点收敛,而不是一致收敛于 $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ 的,但是

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$,这个例子充分说明了函数列一致收敛这个条件只是极限与(R)积分运算交换次序的充分条件而非必要条件,而我们又知道一致收敛是一个非常强的条件,所以自然想到能否将此条件减弱一点呢?

(3)在微积分基本定理中,$\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)$,$x\in[a,b]$,$f'(x)$必须是可积的,然而在 1881 年,*Voltarra* 作出了一个可微函数,且导数有界,但导数不是(*R*)可积的。这就大大限制了微积分基本定理的应用范围,也即并不是所有的可微函数导数都可以通过积分变为原函数,这也说明了(*R*)积分的定义太窄了。

随着数学的向前发展,越来越多的问题在(*R*)积分中都无法给出圆满的解决办法,这时(*L*)积分的给出使之迎刃而解。

首先来比较一下(*L*)积分和(*R*)积分的定义:

(*R*)积分的建立是通过分割定义域,对和式求极限而来,这只有在每个小区间$[t_{k-1},t_k]$上所取值 ζ_k 的改变所引起的 $f(\zeta_k)$变化极小,或者即使 $f(\zeta_k)$变化较大,而 $f(\zeta_k)\Delta x_k$ 改变较小时,函数 $f(x)$才可积;而(L)积分则改变了这种现象,它是对函数 $f(x)$的值域进行分割,把函数值相差不大的点结合在一起,从而使可积函数类得以扩展,而使(1)类问题也得以解决。

$$\int_R D(x)dx = 1\cdot m(Q)+0\cdot m(\overline{Q}) = 0+0=0$$

对定义域与对值域的分割是(R)积分与(L)积分的本质区别,对值域进行分割求积分的方法使 E 中的点分成几大类,更简单明了。另外,(L)积分理论是在(L)测度理论的基础上建立的,(L)测度是平面上度量的推广,这一理论可以处理有界函数和无界函数的情形,而且把函数定义在更一般的点集上,而不仅仅限于$[a,b]$上,从而提供了更加广泛而有用的收敛定理:

勒贝格控制收敛定理:设 g 是可积函数,$|f_n|\leqslant g$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$ 在 E 上几乎处处成立,则在 E 上可积,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm=\int_E f\,dm.$$

勒维定理:设$\{f_n(x)\}$是可测集 E 上非负可测的不减函数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f(x)$,则 $\int_E f(x)dm=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n dm.$

通过这两个定理,我们可以发现在极限运算与(*L*)积分运算交换位置时,只须满足:存在一个控制函数 g 或 $f_n(x)$ 满足单调即可,这些条件与一致收敛条件相比,显然弱得多了,在这样的条件下,极限和积分运算、微分与积分运算、积分与积分运算很容易地交换次序。

比如:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\cos x dx=?$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\cos x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+x}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\cos x=0$

又因为 $\frac{\ln(x+n)}{n}=\frac{n+x}{n}\cdot\frac{\ln(x+n)}{n+x}\leq(1+\frac{x}{n})\frac{\ln 3}{3}\leq(1+$

收稿日期:2005-01-20

作者简介:周成林(1963-),男,河南省南阳人,高级讲师。研究方向:高等数学。

万方数据

$x)\frac{ln3}{n}$

所以 $\left|\frac{ln(x+n)}{n}e^{-x}cosx\right| \le (1+x)\frac{ln3}{n}$

由控制收敛定理,则 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}cosxdx=0$

而在(R)积分中要证明 $\frac{ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}cosx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛是很麻烦的。在(L)测度积分理论下:

(1)微积分定理的使用范围扩大了,在定理中,只须满足 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数,则 $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$

(2)在进行重积分运算时,重积分划为累次积分的条件减弱了。

在(R)积分理论下,要求,$\int f(x,y)dxdy$, $\int dy\int f(x,y)dx)$, $\int dx\int f(x,y)dy$ 都存在时才相等。

在(L)积分理论下,只须可测,且有一个累次积分存在即可。

(3)积分的几何意义也推广开来,将(R)积分中曲边梯形面积推广为 f 在 E 上的下方图形集的测度。

由以上的对比,我们可以明显地感到(R)积分的局限性,而这些缺陷在(L)积分中都已经得到了圆满的解决。那么(R)积分是否在某些方面优于(L)积分呢?二者是怎样的关系呢?从测度论的观点来看,有界函数在 $[a,b]$ 上(R)可积,则 f 在 $[a,b]$ 上(L)可积,且

$$(R)\int_a^b f(x)dx=(L)\int_a^b f(x)dx$$

由此可见,凡是(R)可积的有界函数必(L)可积,反之不成立。

如狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\cap[0,1]\\ 0 & x\in\overline{Q}\cap[0,1]\end{cases}$ 在(R)意义下不可积,但是(L)是可积的,这说明了在 $[a,b]$ 上(L)可积的函数类包含了 $[a,b]$ 上(R)可积的函数类,即凡是(R)积分的性质,(L)积分都有。

R 积分满足:

(1)线性性 $\int_a^b[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]dx=c_1\int_a^b f_1(x)dx+c_2\int_a^b f_2(x)dx$

(2)可加性 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

(3)单调性若 $x\in[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$

(4)绝对值不等性 $|f(x)|\in R[a,b]$, 则 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$

(5)牛顿—莱布尼兹公式 若 $f(x)$、$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号,则 $[a,b]$ 在上至少存在一点 ζ, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\zeta)\int_a^b g(x)dx$.

同样在(L)积分理论下也有这些性质,而且将其积分范围推广到任意点集 E 上。另外,它还具有一些(R)积分没有的性质。

由此可见(L)积分不仅扩大了可积函数类,而且因为它所具有的独特的性质,解决了古典分析中许多解答不了的问题,使分析数学进入到现代分析时代。

然而,随着函数论、概率论等各门学科的发展,也暴露出来(L)积分的局限性。我们知道 $\int_0^1 f(x)dx$ 可以看作是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的平均值,而 $3\int_0^1 f(x)x^2dx$ 也是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一种平均,但此时,$[0,1]$ 中接近 1 的点与接近 0 的点,对 $f(x)$ 于求平均值的分量就不一样,这就需要用一个新的量来描述这种"偏重",于是人们就设法对(R)积分进行新的推广,而且力求比(L)积分更优越,于是产生了 $R-\delta$, 积分 $L-\delta$, 其中 $L-\delta$ 积分是建立在一种比(L)更广的测度理论上的。

因此(L)积分理论还是有待发展的。

参考文献:

[1] 郑维行,王声旺.实变函数与泛函分析概要[J].郑航学报,1999,(4).
[2] 田民强.实变函数第3[J].厦门大学学报,1996,(11).
[3] 江泽坚.实变函数论[J].成都科技大学学报,2000,(4).
[4] 张一鸣.实变函数与泛函分析初步[J].吉林工学院学报,2001,(2).

【责任编校 郭 涛】

万方数据

勒贝格积分与黎曼积分的区别与联系

万方数据 WANFANG DATA 文献链接

作者：　周成林
作者单位：　河南交通职业技术学院,河南,郑州,450005
刊名：　新乡教育学院学报
英文刊名：　JOURNAL OF XINXIANG EDUCATION COLLEGE
年，卷(期)：　2005,18(2)
被引用次数：　2次

参考文献(4条)

1. 田民强 实变函数第3 1996(11)

2. 郑维行;王声旺 实变函数与泛函分析概要 1999(04)

3. 张一鸣 实变函数与泛函分析初步 2001(02)

4. 江泽坚 实变函数论 2000(04)

引证文献(2条)

1. 王军涛.宋林森 Riemann积分与Lebesgue积分的比较[期刊论文]-河南科技学院学报（自然科学版） 2008(4)

2. 潘学锋 浅谈黎曼积分与勒贝格积分的区别[期刊论文]-甘肃联合大学学报（自然科学版） 2007(5)

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_xxjyxyxb200502033.aspx